Zamiana zmiennych w całkach wielokrotnych

Anna Bahyrycz

23 maja 2022

Twierdzenie 1 (o zamianie zmiennych w całce podwójnej)

Niech Δ i D będą obszarami regularnymi na płaszczyźnie oraz funkcja wektorowa T określona wzorem

$$T : \begin{cases} x = \phi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

przekształca obszar Δ na D. Jeżeli:

1. *funkcje ϕ i ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na zbiorze otwartym zawierającym Δ,*
2. *funkcja f jest ciągła na obszarze D,*
3. *odwzorowanie T wnętrza obszaru Δ w obszar D jest przekształceniem różnowartościowym,*
4. *wewnątrz obszaru Δ jakobian przekształcenia T jest różny od zera*

to

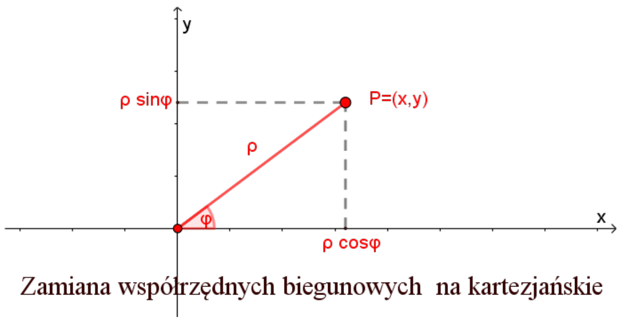
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big)|J_T(u,v)|\,dudv.$$

Współrzędne biegunowe

współrzędne kartezjańskie	współrzędne biegunowe
$P = P(x,y)$	$P = P(\rho,\varphi)$
(~ postać algebraiczna liczby zespolonej)	(~ postać trygonometryczna liczby zespolonej)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho \geq 0 \\ \varphi \in [0,2\pi) \ \text{(albo } \varphi \in [-\pi,\pi)) \end{cases}$$

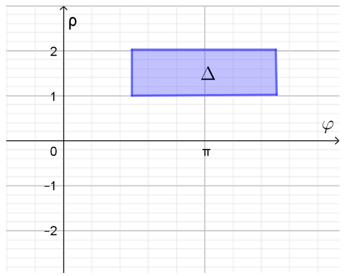
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

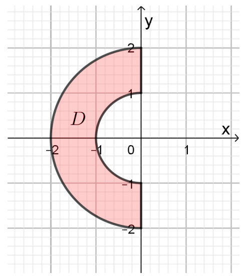


Zamiana współrzędnych biegunowych na kartezjańskie

Przykład 1

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ po obszarze regularnym $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \leq 0\}$.





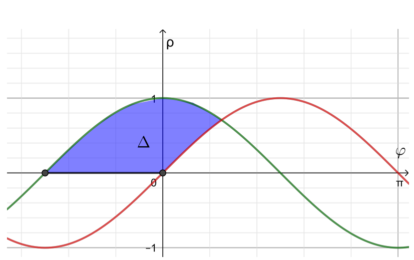
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_\Delta \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\cdot\rho\,d\rho d\varphi$$

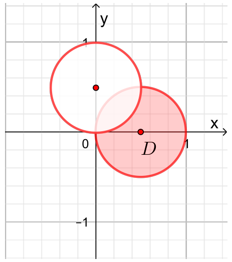
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\Big(\int_1^2 \rho\cdot\rho\,d\rho\Big)d\varphi = \Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\varphi\Big)\cdot\Big(\int_1^2 \rho^2\,d\rho\Big) = \pi\cdot\Big[\frac{1}{3}\rho^3\Big]_1^2 = \frac{7}{3}\pi$$

Przykład 2

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $f(x,y)=y$ *po obszarze regularnym* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le x^2+y^2\le x\}$.

$$\left(x^2+y^2-y\ge 0 \wedge x^2+y^2-x\le 0\right) \Leftrightarrow \left(x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\ge\frac{1}{4}\wedge\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\le\frac{1}{4}\right)$$





Δ *jest obszarem regularnym*

Δ_1 :
$$\begin{cases} 0\le\rho\le\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0\end{cases}$$

Δ_2 :
$$\begin{cases} \sin\varphi\le\rho\le\cos\varphi \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

Przykład 2 c.d.

Δ_1 :
$$\begin{cases} 0\le\rho\le\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0\end{cases}$$

Δ_2 :
$$\begin{cases} \sin\varphi\le\rho\le\cos\varphi \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$\iint_D y\,dxdy=\iint_\Delta \rho\sin\varphi\cdot\rho\,d\rho d\varphi=\iint_{\Delta_1}\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi+\iint_{\Delta_2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\int_0^{\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\sin\varphi}^{\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{3}\sin\varphi\left[\rho^3\right]_0^{\cos\varphi}d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}\sin\varphi\left[\rho^3\right]_{\sin\varphi}^{\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi(\cos^3\varphi-\sin^3\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\varphi\,d\varphi$$

Współrzędne walcowe

współrzędne kartezjańskie

$P=P(x,y,z)$

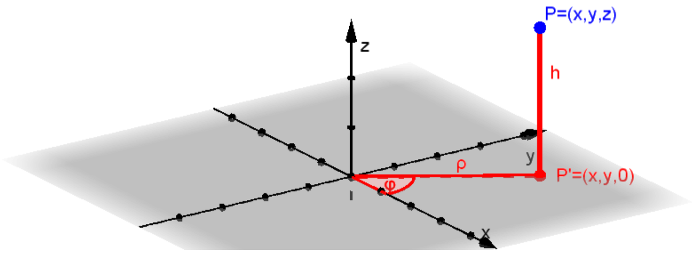
współrzędne walcowe

$P=P(\rho,\varphi,h)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h\end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho\ge 0 \\ \varphi\in[0,2\pi)\ \ \text{(albo } \varphi\in[-\pi,\pi)) \\ h\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$x^2+y^2=\rho^2$$

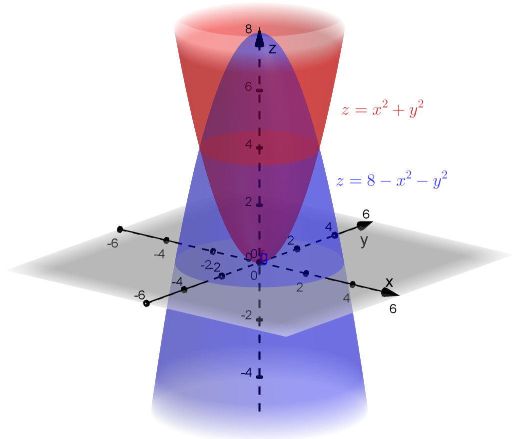


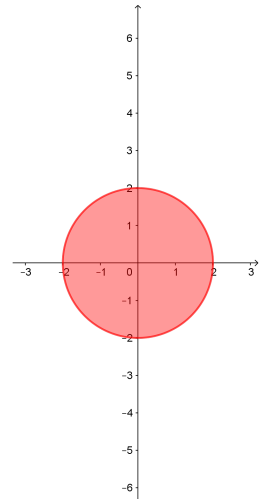
Twierdzenie 3

Jeżeli funkcja f *jest ciągła na obszarze* U*, któremu odpowiada we współrzędnych walcowych obszar regularny* Ω*, to*

Przykład 3

Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całkę potrójną $\iiint_U x^2+y^2\,dxdydz$ *gdzie* U *jest ograniczony powierzchniami* $z=x^2+y^2\ \wedge\ z=8-x^2-y^2$.





Przykład 3 c.d.

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le 2 \\ \rho^2 \le & h & \le 8-\rho^2 \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2\, dxdydz = \iiint_\Omega \rho^2\cdot\rho\, d\rho d\varphi dh = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \Big[\int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \rho^3\, dh \Big] d\rho \Big\} d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \rho^3 \Big[h \Big]_{\rho^2}^{8-\rho^2} d\rho \Big\} d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^2 \rho^3(8-2\rho^2)\, d\rho \Big\} d\varphi$$

$$\Big(\int_0^{2\pi} d\varphi \Big) \cdot \Big(\int_0^2 8\rho^3 - 2\rho^5\, d\rho \Big) = 2\pi \cdot \Big[2\rho^4 - \frac{1}{3}\rho^6 \Big]_0^2 = \frac{32}{3}\pi$$

Współrzędne sferyczne

współrzędne kartezjańskie

$P = P(x,y,z)$

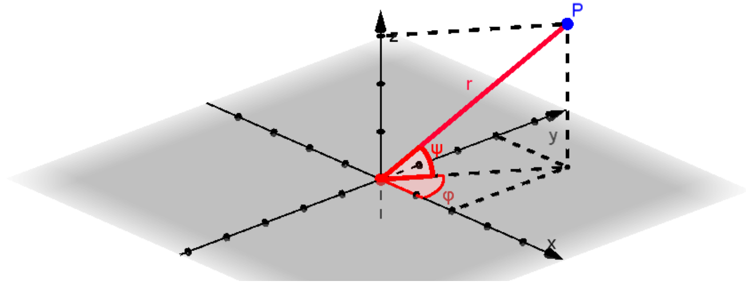
współrzędne sferyczne

$P = P(r,\varphi,\psi)$

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\psi \\ y &= r\sin\varphi\cos\psi \\ z &= r\sin\psi \end{cases}$$

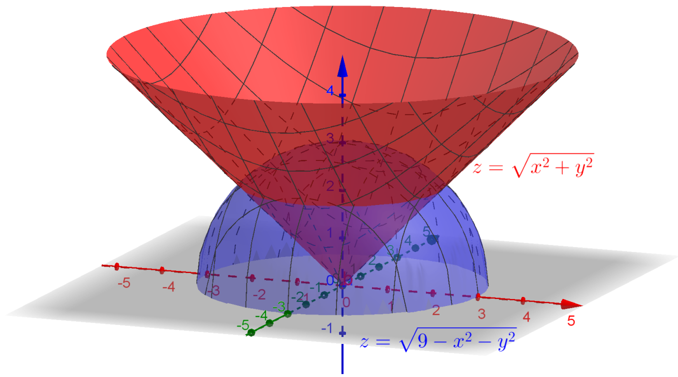
$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

$$\begin{cases} r \ge 0 \\ \varphi \in [0,2\pi) \ \text{(albo } \varphi \in [-\pi,\pi)) \\ \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



Przykład 4

Wprowadzając współrzędne sferyczne lub walcowe obliczyć całkę potrójną $\iiint_U x^2+y^2\, dxdydz$ *, gdzie* U *jest ograniczony powierzchniami* $z = \sqrt{x^2+y^2} \ \wedge\ z = \sqrt{9-x^2-y^2}$.



Twierdzenie 4

Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze U, któremu odpowiada we

$l\psi.$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne sferyczne)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & r & \le 3 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \le & \psi & \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2\, dxdydz = \iiint_\Omega r^2\cos^2\psi \cdot r^2\cos\psi\, drd\varphi d\psi$$

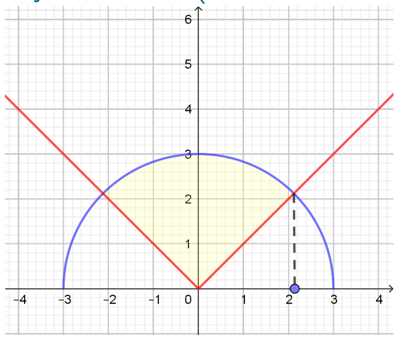
$$= \int_0^3 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^3\psi\, d\psi \Big] d\varphi \Big\} dr$$

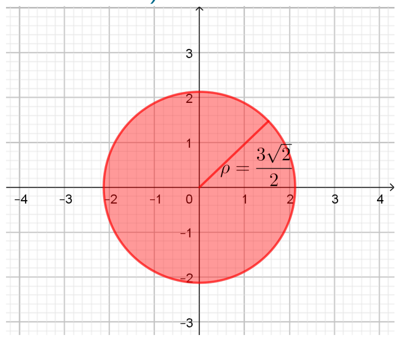
$$= \Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d\psi \Big) \cdot \Big(\int_0^{2\pi} d\varphi \Big) \cdot \Big(\int_0^3 r^4 dr \Big)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{3^5}{5} \Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\psi - \cos\psi\sin^2\psi)\, d\psi \Big)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{3^5}{5} \Big[\sin\psi - \frac{\sin^3\psi}{3} \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot \frac{3^5}{5} \cdot \Big(1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} \Big) = \frac{81}{10}\pi(8 - 5\sqrt{2})$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne walcowe)





$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \rho \le & h & \le \sqrt{9-\rho^2} \end{cases}$$

Przykład 4 c.d. (zamiana na współrzędne walcowe)

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}\}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ 0 \le & \rho & \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \rho \le & h & \le \sqrt{9-\rho^2} \end{cases}$$

$$\iiint_U x^2+y^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega \rho^2 \cdot \rho \, d\rho d\varphi dh = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \Big[\int_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}} \rho^3 \, dh \Big] \, d\rho \Big\} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \rho^3 \big[h\big]_\rho^{\sqrt{9-\rho^2}} \, d\rho \Big\} d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \rho^3 (\sqrt{9-\rho^2} - \rho) \, d\rho \Big\} d\varphi$$

$$= \Big(\int_0^{2\pi} d\varphi \Big) \cdot \Big(\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (\rho^3 \sqrt{9-\rho^2} - \rho^4) \, d\rho \Big) = \frac{81}{10} \pi (8 - 5\sqrt{2})$$

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \rho^3 \sqrt{9-\rho^2} \, d\rho = \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & 9-\rho^2 \\ dt & = & -2\rho d\rho \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int_9^{\frac{9}{2}} \sqrt{t}(9-t) \, dt$$

$$= \Big[\frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \Big]_{\frac{9}{2}}^{9} = 3^4 - \frac{3^5}{5} - \frac{3^4}{2\sqrt{2}} + \frac{3^5}{20\sqrt{2}} = \frac{3^4}{40} (40 - 24 - 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2})$$